பொருளடக்கம்

கணிதவியல் தொகுதி-II

J8S2H7

மின்னூல்

M7X9N6

மதிப்பீடு

B225_12_MATHS_TM

இணைய வளங்கள்

2020 QR GUIDE

பாடநூலில் உள்ள விரைவுக் குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன் பேசியில் கூகுள் playstore கொண்டு DIKSHA செயலியை பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியை திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தி பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீடுகளை ஸ்கேன் செய்யவும்.
- திரையில் தோன்றும் கேமராவை பாடநூலின் QR Code அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம். அந்த QR Code உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள மின் பாட பகுதிகளை பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு: இணையச்செயல்பாடுகள் மற்றும் இணைய வளங்களுக்கான QR code களை Scan செய்ய DIKSHA அல்லாத ஏதேனும் ஓர் QR code Scanner ஐ பயன்படுத்தவும்.

பாடச்சுருக்கம்

- $y = f(x)$ எனும்போது $\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது y -ஐப் பொறுத்து x -ன் கணநேர மாறுபாட்டு வீதத்தைக் குறிக்கிறது.
- $y = f\left(g(t)\right)$ எனும்போது $\dfrac{dy}{dt} = f'\left(g(t)\right)\cdot g'(t)$ ஆகும். இதனை சங்கிலி விதி என்கிறோம்.
- $y = f(x)$ என்ற வளைவரையின் மீதுள்ள (a,b) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு என்பது $y-b=(x-a)\times\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$ அல்லது $y-b=f'(a)\cdot(x-a)$ ஆகும்.
- ரோலின் தேற்றம்

  $f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ -ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b) -ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கிறது மேலும் $f(a)=f(b)$ எனில், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c\in(a,b)$ ஆனது $f'(c)=0$ என்றவாறு இருக்கும்.

- லெக்ராஞ்சியின் இடமதிப்புத் தேற்றம்

  $f(x)$ ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ -ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a,b) -ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் ($f(a), f(b)$ ஆகியவை சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை). உள்ளது என்க. அப்போது குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c\in(a,b)$ -யினை

  $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ எனுமாறு காணலாம்.

- டெய்லரின் தொடர்

  $f(x)$ என்ற சார்பானது $x=a$ -ல் முடிவற்ற எண்ணிக்கையிலான முறை வகையிடத்தக்கது என்க. $(x-a, x+a)$ எனும் இடைவெளியில் $f(x)$ -ஐ கீழ்க்காணும் வடிவத்தில் விரிவாக்கலாம் :

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

- மெக்லாரனின் தொடர்

  $a=0$ எனில், மேற்கண்ட விரிவின் வடிவம்

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

- லோபிதாலின் விதி

  $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவை வகையிடத்தக்க சார்புகள் மற்றும் $g'(x)\neq 0$ மேலும்

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ எனில் $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ எனில் $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.

- $f(x)$ என்ற சார்பு (a,b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது மற்றும் $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)>0\ \forall x\in(a,b)$ எனில், $f(x)$ ஆனது (a,b) என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக ஏறும்.

$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) < 0, \forall x \in (a,b)$ எனில், $f(x)$ ஆனது (a,b) என்ற இடைவெளியில் திட்டமாக இறங்கும்.

- **மூடிய இடைவெளி $[a,b]$-ல் தொடர்ச்சியான, சார்பு $f(x)$-க்கு மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு அறுதி மதிப்புகளை காணும் முறை**

  படி 1 : $f(x)$-க்கு (a,b)-ல் நிலை எண்களைக் காண்க.

  படி 2 : $f(x)$-ன் மதிப்புகளை அனைத்து நிலை எண்கள் மற்றும் முனைப்புள்ளிகள் a மற்றும் b -ல் காண்க.

  படி 3 : படி 2-ல் காணப்பட்ட மதிப்புகளில் மிகப்பெரிய எண் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மிகச்சிறிய எண் மீச்சிறு சிறுமம் ஆகும்.

- முதலாம் வகைக்கெழுச் சோதனை

  $f(x)$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்பிற்கு c-ஐ உள்ளடக்கிய திறந்த இடைவெளி I-யில் $(c, f(c))$ என்பது நிலைப்புள்ளி என்க. $f(x)$ ஆனது c-ஐத் தவிர்த்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது எனில் $f(c)$-ஐ கீழ்க்காணுமாறு வகைப்படுத்தலாம்: (x ஆனது I என்ற இடைவெளியில் இடமிருந்து வலமாக நகரும்போது)

(i) $f'(x)$ ஆனது c-ல் குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறினால், $f(x)$-க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகும்.

(ii) $f'(x)$ ஆனது c-ன் மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறினால், $f(x)$-க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகும்.

(iii) $f'(x)$-ன் குறியானது c-ன் இருபுறமும் மிகையாகவோ அல்லது c-ன் இருபுறமும் குறையாகவோ இருந்தால், $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமமும் இல்லை இடம் சார்ந்த பெருமமும் இல்லை எனலாம்.

- இரண்டாம் வகைக்கெழுச் சோதனை

  c எனும் நிலைப்புள்ளியில் $f'(c) = 0$ எனவும், c-ன் அண்மையில் $f'(x)$ காணத்தக்கது எனவும், மேலும் $f''(c)$ காணத்தக்கது எனவும் கொண்டால் $f''(c) < 0$ எனில் c-யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தை அடையும், மேலும் $f''(c) > 0$ எனில் c-யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த சிறுமத்தை அடையும். $f''(c) = 0$ எனில், இந்த சோதனையில் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றிய தகவல் இல்லை என்கிறோம்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra-வின் “**12th Standard Mathematics Vol-2**” பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் “**Applications of Differential Calculus**” எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

12. $u(x,y)=x^2+3xy+y-2019$, எனில் $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(4,-5)}$ -ன் மதிப்பு

(1) -4 (2) -3 (3) -7 (4) 13

13. சார்பு $g(x)=\cos x$ -ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு $x=\frac{\pi}{2}$ இல்

(1) $x+\frac{\pi}{2}$ (2) $-x+\frac{\pi}{2}$ (3) $x-\frac{\pi}{2}$ (4) $-x-\frac{\pi}{2}$

14. $w(x,y,z)=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$, எனில் $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ -ன் மதிப்பு

(1) $xy+yz+zx$ (2) $x(y+z)$ (3) $y(z+x)$ (4) 0

15. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$, எனில் f_x-f_z -ன் மதிப்பு

(1) $z-x$ (2) $y-z$ (3) $x-z$ (4) $y-x$

பாடச்சுருக்கம்

- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ என்பதை வகையிடத்தக்கச் சார்பாகவும், $x_0\in(a,b)$ எனவும் கொள்க. x_0 என்ற புள்ளியில் f -ன் தோராய மதிப்பு L -ன் வரையறை

  $L(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \forall x\in(a,b)$ எனலாம்.

- மெய்மதிப்பு பூச்சியமற்றது எனில்

  $$\text{சார்பிழை} = \frac{\text{மெய்மதிப்பு} - \text{தோராய மதிப்பு}}{\text{மெய்மதிப்பு}}$$

  $$\text{சதவீதப்பிழை} = \text{சார்பிழை} \times 100\,.$$

- x -ன் அதிகரிப்பு Δx உடன் மற்றும் எல்லா $x\in(a,b)$ -க்கும் $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பு என்க. f -ன் வகையீடு $df=f'(x)\Delta x$

- **ஒரு மாறியில் அமைந்த சார்புகளுக்கான எல்லை விதிகள் (எல்லை தேற்றங்கள்) பல மாறிகளைக் கொண்ட சார்புகளுக்கும் பொருந்தும்.**

- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ மற்றும் $(x_0,y_0)\in A$ என்க.

(i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h}$ -ன் மதிப்பு காணப்பெறின் $(x_0,y_0)\in A$ இல் F -க்கு x -ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழு உள்ளது எனலாம். இந்த எல்லை மதிப்பு $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

(ii) $\lim\limits_{k\to 0}\frac{F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)}{k}$ -ன் எல்லை மதிப்பு காணப்பெறின் $(x_0,y_0)\in A$ இல் F -க்கு y -ஐ பொருத்த பகுதிவகைக்கெழு உள்ளது எனலாம். இந்த எல்லை மதிப்பு $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ எனக்குறிக்கப்படும்.

- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$ என்க. A இல் f_{xy} மற்றும் f_{yx} காணப்பெற்று அவை தொடர்ச்சியானதாகவும் இருக்குமானால் A இல் $f_{xy}=f_{yx}$ A என இருக்கும்.

- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ என்க. சார்பு $u: A\to\mathbb{R}^2$ என்பது $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \forall(x,y)\in A$ எனுமாறு இருக்குமானால் அது A -ல் **சீரானது** எனலாம். இது **லாபிலாஸின்** சமன்பாடு எனப்படும்.
- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F: A\to\mathbb{R}$, மற்றும் $(x_0,y_0)\in A$ என்க.

  (i) $(x_0,y_0)\in A$ என்ற புள்ளியில் F -ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு

  $$F(x,y)=F(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

  (ii) F -ன் வகையீடு $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy$,

  இங்கு $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- $W(x,y)$ என்பது $\dfrac{\partial W}{\partial x},\dfrac{\partial W}{\partial y}$ என்றபகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ள x,y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு என்க. x,y என்ற இரு மாறிகளும் t என்ற ஒரு மாறியைப் பொருத்து வகையிடக்கூடிய சார்புகள் எனில் W -ம் t -ஐப் பொருத்து வகையிடக்கூடிய சார்பாகும்.

  $$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
- $W(x,y)$ என்பது x,y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த $\dfrac{\partial W}{\partial x},\dfrac{\partial W}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கொண்ட சார்பு என்க. $x = x(s,t)$ மற்றும் $y = y(s,t)$, $s,t\in\mathbb{R}$ என்ற இரு மாறிகளுக்கும் s மற்றும் t-ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டு எனில்,

  $$\frac{\partial W}{\partial s}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$
- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F: A\to\mathbb{R}^2$ என்க. F என்ற சார்பு Aஇன் மீது தொடர்பகுதி வகைக்கெழு உடையதாகவும் படி p உடைய சமபடித்தான சார்பாகவும் இருக்குமானால், $x\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}=pF$ -ஐ நிறைவு செய்யும்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra–வின் “**12th Standard Mathematics Vol-2**” பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் “**Differential and Partial Derivatives**” எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

B262_12_MATHS_EM

பாடச்சுருக்கம்

(1) வரையறுத் தொகையிடலின் கூட்டலின் எல்லை

(i) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

(ii) $$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right).$$

(2) வரையறுத்த தொகையிடலின் பண்புகள்

(i) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$$

(ii) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(iii) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(iv) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

(v) $$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(vi) $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\,dx.$$

(vii) $f(x)$ ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பு எனில் $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

(viii) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைப் படைச் சார்பு எனில் $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

(ix) $f(2a-x) = f(x)$, எனில் $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

(x) $f(2a-x) = -f(x)$, எனில் $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$

(xi) $f(a-x) = f(x)$ எனில் $\int_0^a x\,f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$

(3) பெர்னோலி சூத்திரம்

$$\int uvdx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots.$$

(4) குறைப்புச் சூத்திரங்கள்

(i) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, & \text{vdpy; } n = 2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{2}{3}, & \text{vdpy; } n = 3,5,7\cdots \end{cases}$$

(ii) n இரட்டைப்படை எண் மற்றும் m இரட்டைப்படை எனில்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{1}{(m+2)}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-3)}{(m-2)}\frac{(m-5)}{(m-4)}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

(iii) n ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் m மிகை முழு எண் (இரட்டைப்படை அல்லது ஒற்றைப்படை), எனில்

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)} \frac{(n-3)}{(m+n-2)} \frac{(n-5)}{(m+n-4)} \cdots \frac{2}{(m+3)} \frac{1}{(m+1)}$$

(5) காமா தொகையிடல்கள்

(i) $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = (n-1)!$

(ii) $\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

(6) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகளுக்கு இடையே அடைபடும் அரங்கத்தின் பரப்பு

(i) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் x-அச்சின் மேல் உள்ள பரப்பானது, $A = \int_a^b y dx$.

(ii) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $x = a$ மற்றும் $x = b$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் x-அச்சின் கீழ் உள்ள பரப்பானது, $A = -\int_a^b y dx = \left|\int_a^b y dx\right|$.

(iii) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $y = c$ மற்றும் $y = d$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் y-அச்சின் வலதுபுறத்தில் உள்ள பரப்பானது, $A = \int_c^d x \, dy$.

(iv) ஒரு வளைவரைக்கும் கோடுகள் $y = c$ மற்றும் $y = d$ ஆகியவற்றுக்கும் இடையே அடைபடும் y-அச்சின் இடது புறத்தில் உள்ள பரப்பானது, $A = -\int_c^d x dy = \left|\int_c^d x dy\right|$.

(7) சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு

(i) x-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

(ii) y-அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு $V = \pi \int_c^d x^2 dy$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra–வின் **"12th Standard Mathematics Vol-2"** பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் **"Applications of Integration"** எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

பாடச்சுருக்கம்

1. ஏதேனும் ஒரு சமன்பாடு ஒரு சார்பின் குறைந்தபட்சம் ஒரு சாதாரண வகைக்கெழு அல்லது பகுதி வகைக்கெழுவையாவது கொண்டிருக்குமானால் அச்சமன்பாடு **வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.**
2. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் வரிசை (order) ஆகும்.
3. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவில் எழுத இயலுமெனில், அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழுவின் முழு எண் படியே அச்சமன்பாட்டின் படி எனப்படும்.
4. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை மிக உயர்ந்த வரிசைக் கொண்ட வகைக்கெழுவை முதன்மை உறுப்பாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடாக எழுத இயலவில்லை எனில் அச்சமன்பாட்டின் படியை வரையறுக்க முடியாது.
5. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒரேயொரு சாரா மாறியைப் பொருத்து ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் சாதாரண வகைக்கெழுக்களைக் கொண்டுள்ளது எனில், அச்சமன்பாடு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
6. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை மட்டும் கொண்டிருக்கும் எனில், அச்சமன்பாடு பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
7. ஒரு மாறிலியைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து அம்மாறிலியை நீக்குவதால் முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டு மாறிலிகளையும் நீக்குவதால் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இதேபோல் தொடர, நீக்கப்படும் மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைகேற்ப வரிசைகளைக் கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.
8. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு சார்ந்த மாறிகளை சாரா மாறிகளுடன் தொடர்புபடுத்தும் கோவை அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.
9. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் (எதேச்சை மாறிலிகளின்) எண்ணிக்கையானது, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருப்பின், அத்தீர்வினை அச்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு என்கிறோம்.
10. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளுக்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைக் கொடுப்பதால் பெறப்படும் தீர்வினை குறிப்பிட்ட தீர்வு என்போம்.
11. $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ எனும் வடிவில் உள்ள சமன்பாடு மாறிகள் பிரிபடக்கூடியது அல்லது மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய சமன்பாடு எனப்படும்.
12. $n \in \mathbb{R}$ மற்றும் பொருத்தமாகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட x, y மற்றும் t ஆகியவற்றுக்கு $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ எனில், x, y ஆகியவற்றை மாறிகளாகக் கொண்ட சார்பு $f(x,y)$ ஆனது n ஆம் படியில் சமபடித்தான சார்பு எனப்படும். இது ஆய்லரின் சமபடித்தன்மை எனவும் அழைக்கப்படும்.
13. $f(x,y)$ என்பது படி 0 கொண்ட சமபடித்தான சார்பு எனில், $f(x,y)$ என்பதை எப்பொழுதும் $g\left(\frac{y}{x}\right)$ அல்லது $g\left(\frac{x}{y}\right)$ எனும் வடிவில் எழுதுமாறு g எனும் சார்பு இருக்கும்.
14. ஒரு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ எனும் அமைப்பில் எழுதமுடியுமானால், அச்சமன்பாடு சமபடித்தான அமைப்பில் உள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

15. M மற்றும் N என்பவை ஒரே படி கொண்ட சமபடித்தான சார்புகள் எனில், வகையீடு அமைப்பில் உள்ள $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ எனும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

16. முதல் வரிசை நேரியல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \ldots(1)$$

ஆகும். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x–ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் y மற்றும் அதன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இருக்காது. மேலும் சார்ந்த மாறி y மற்றும் சாராமாறி x ஐப் பொருத்த அதனுடைய வகைக்கெழு ஆகியவை முதலாம் படியாக மட்டுமே காணப்படும். கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx + C$ எனக் கிடைக்கிறது. இங்கு $e^{\int Pdx}$ என்பது சமன்பாடு (1)–ன் தொகையீட்டுக் காரணி (தொ.கா) எனப்படும்.

17. $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ என்ற முதல் வரிசை நேரியல் சமன்பாட்டில் P மற்றும் Q என்பன y–ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் x மற்றும் $\frac{dx}{dy}$ இவ்விரண்டும் பெருக்கலாக இருக்காது. மேலும் சார்ந்த மாறி x மற்றும் சாராமாறி y ஐப் பொருத்த அதன் வகைக் கெழு ஆகியவற்றின் படி 1 ஆக மட்டுமே காணப்படும். இவ்வகையில், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy} dy + C$ ஆகும்.

18. t நேரத்தில் ஒரு பொருளின் இருப்பு x எனில், t நேரத்தில் அப்பொருளின் இருப்பின் கணநேர மாறுவீதம் $\frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra–வின் **“12th Standard Mathematics Vol-2”** பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் **“Ordinary Differential Equations”** எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

பாடச்சுருக்கம்

- ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது S எனும் கூறுவெளியிலிருந்து $\mathbb{R}$ எனும் மெய்யெண் கணத்தின் மீது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் சார்பாகும்.
  $\mathbb{R}$ -இல் உள்ள இடைவெளி அல்லது உட்கணம் அல்லது கூறுபுள்ளிகளின் நேர்மாறு பிம்பங்கள் S -இல், ஒரு நிகழ்வாக அமைகிறது. ஒவ்வொரு நிகழ்வும் நிகழ்தகவு மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும்.
- கூறுவெளி S-லிருந்து மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}$-க்கு வரையறுக்கப்படும் X எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி, X -இன் வீச்சு எண்ணிடதக்கதாக இருந்தால் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியாகும். அதாவது, முடிவுறு அல்லது எண்ணிடதக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். இங்கு S கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பின் நிகழ்தகவும் மிகையெண் நிகழ்தகவுக் கொண்டதாகவும், நிகழ்தகவுகளின் மொத்த கூடுதல் ஒன்றாகவும் இருக்கும்.
- $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots,$ என்ற தனி மதிப்புகளைக் கொண்ட X என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியெனில், சார்பு $f(.)$ அல்லது $p(.)$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும் $f(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ என்பது நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பாக வரையறுக்கப்படுகிறது.
- $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ எனும்படி $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ மதிப்புகளுக்கு $F(x)$-ஐ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பாகக் கொண்டிருக்கும் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$-இன் நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு $F(x) = P\left(X \le x\right) = \sum\limits_{x_i \le x} f\left(x_i\right), \quad x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.
- S என்பது ஒரு கூறுவெளி என்க. $X : S \to \mathbb{R}$ எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி $\mathbb{R}$-ன் ஒரு கணமான I -ல் ஏதேனும் மதிப்பைப் பெறும் என்க. I -இல் உள்ள அனைத்து x -க்கும் $P\left(X = x\right) = 0$ என்பது X -இன் ஒரு **தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியாகும்**.
- தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியில் $x \in \left[a, b\right]$ எனுமாறு உள்ள சாத்தியமான ஒவ்வொரு நிகழ்வு x -ற்கும் $P(a \le X \le b) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ எனும் பண்பு உள்ளது எனில், $f(x)$ எனும் ஒரு குறையற்ற மெய்யெண் மதிப்புடைய சார்பானது, **நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாகும்**.
- $f(x)$ எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்தியுடைய ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X–ன் பரவல் சார்பு அல்லது குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$ என்பது

$$F(x) = P\left(X \le x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\, du, \qquad -\infty < u < \infty .$$

- ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு $f\left(x\right)$ என்க. $E(X)$ அல்லது μ எனக் குறிப்பிடப்படும்

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x} x\, f(x) & X \text{ தனிநிலை மாறி எனில்} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & X \text{ தொடர்ச்சியான மாறி எனில்} \end{cases}$$

என்பது எதிர்பார்ப்பின் மதிப்பு அல்லது சராசரி அல்லது X -இன் கணித எதிர்பார்ப்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

- $V(X)$ or σ^2 (or $\sigma_x^{\ 2}$) எனக் குறிப்பிடப்படும் சமவாய்ப்பு மாறி X–ன் பரவற்படி

$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2$ ஆகும்.

கணித எதிர்பார்ப்பு மற்றும் பரவற்படியின் பண்புகள்

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$, இங்கு a மற்றும் b ஆகியன மாறிலிகள்.

கிளைத்தேற்றம் 1 :	$E(aX)$	$= aE(X)$	($b = 0$ எனும்போது)
கிளைத்தேற்றம் 2 :	$E(b)$	$= b$	($a = 0$ எனும்போது)

(ii) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

(iii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ இங்கு a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள்.

கிளைத்தேற்றம் 3 :	$V(aX)$	$= a^2 V(X)$	($b = 0$ எனும்போது)
கிளைத்தேற்றம் 4 :	$V(b)$	$= 0$	($a = 0$ எனும்போது)

- X (வெற்றி) $= 1$ மற்றும் X (தோல்வி) $= 0$ என வரையறுக்கப்படும் ஒரு பெர்னோலி சோதனையுடன் இணைந்த சமவாய்ப்பு மாறி X –க்கு,

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1 - p & x = 0 \end{cases}, \text{ இங்கு } 0 < p < 1$$

X என்பது பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனவும் மற்றும் $f(x)$ என்பது பெர்னோலி பரவல் எனவும் முறையே அழைக்கப்படுகிறது

- X என்பது பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனவும் மற்றும் $f(x)$ என்பது பெர்னோலி பரவல் எனவும் முறையே அழைக்கப்படுகிறது.
- பண்பளவை p உடைய பெர்னோலி பரவலைப் பின்பற்றும் X ஒரு பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனில், சராசரி μ மற்றும் பரவற்படி σ^2 ஆகியவை

$\mu = p$ மற்றும் $\sigma^2 = pq$ ஆகும்.

- n –தொடர்ச்சியான முயற்சிகளில் உள்ள வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X குறித்தால்,

(i) n –தொடர்ச்சியான முயற்சிகள் சார்பற்றவையாகவும் மற்றும் n –எண்ணிடத் தக்கவையாகவும்

(ii) 'வெற்றி' அல்லது 'தோல்வி' எனப் பெயரிடப்பட்ட இரு சாத்தியமான விளைவுகளை மட்டுமே ஒவ்வொரு முயற்சியும் கொண்டிருக்கவும்

(iii) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் p எனக் குறிக்கப்படும் வெற்றியின் நிகழ்தகவு மாறாது இருக்கவும், அமைந்தால்ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கப்படும்.

- ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது n–சார்பற்ற முயற்சிகளில் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க. வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனக் கொண்டால், தோல்விக்கான நிகழ்தகவு $q = 1 - p$ ஆகும். ஈருறுப்பு பரவலை $X \sim B(n, p)$ எனக் குறிப்பர்.

  X –ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$ ஆகும்.

- p மற்றும் n எனும் பண்பளவைகளைக் கொண்ட ஓர் ஈருறுப்பு பரவலின் ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. சராசரி μ மற்றும் பரவற்படி σ^2 முறையே

  $$\mu = np \text{ மற்றும் } \sigma^2 = np(1-p) \text{ ஆகும்.}$$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra–வின் “**12th Standard Mathematics Vol-2**” பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் “**Probability Distributions**” எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.

18. $p \wedge (\neg p \vee q)$ என்ற கூற்று

(1) ஒரு மெய்மம் (2) ஒரு முரண்பாடு

(3) $p \wedge q$ –க்கு தர்க்க சமானமானவை (4) $p \vee q$ –க்கு தர்க்க சமானமானவை

19. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றிற்கும் அதன் மெய் மதிப்பை தீர்மானிக்க.

(a) $4+2=5$ மற்றும் $6+3=9$ (b) $3+2=5$ மற்றும் $6+1=7$

(c) $4+5=9$ மற்றும் $1+2=4$ (d) $3+2=5$ மற்றும் $4+7=11$

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	F	T	F	T
(2)	T	F	T	F
(3)	T	T	F	F
(4)	F	F	T	T

20. பின்வருபவைகளில் எது உண்மையல்ல?

(1) ஒரு கூற்றின் மறுப்பின் மறுப்பு அக்கூற்றேயாகும்.

(2) ஒரு மெய்மை அட்டவணையில் இறுதி நிரல் முழுவதும் T எனில் அது ஒரு மெய்மமாகும்.

(3) ஒரு மெய்மை அட்டவணையில் இறுதி நிரல் முழுவதும் F எனில் அது ஒரு முரண்பாடாகும்.

(4) p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகள் எனில் $p \leftrightarrow q$ என்பது ஒரு மெய்மமாகும்.

பாடச்சுருக்கம்

(1) S என்பது வெற்றற்ற கணம் என்க. S –ன் மீது வரையறுக்கப்படும் $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியானது S –ல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒவ்வொரு வரிசையிட்ட சோடி (a,b) –யுடனும் S –ல் $a*b$ என்ற ஒரே ஒரு உறுப்பை தொடர்புபடுத்தும் ஒரு விதி ஆகும்.

(2) பரிமாற்றுப் பண்பு: ஒரு வெற்றற்ற கணம் S –ன் மீதான ஈருறுப்புச் செயலி $*$ ஆனது பரிமாற்றுத் தன்மையுடையதாயின் $a*b=b*a,\ \forall a,b \in S$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

(3) சேர்ப்புப் பண்பு: ஒரு வெற்றற்ற கணம் S –ன் மீதான ஈருறுப்புச் செயலி $*$ ஆனது சேர்ப்புப் பண்புடையதாயின், $a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall a,b,c \in S$.

(4) சமனிப் பண்பு : $\forall a \in S\ \exists e \in S \ni a*e=a=e*a=a$ இங்கு e என்பது S –ன் சமனி உறுப்பாகும்.

(5) எதிர்மறைப் பண்பு: $\forall a \in S\ \exists b \in S \ni a*b=e$ மற்றும் $b*a=e$. இங்கு b ஆனது a –ன் எதிர்மறை உறுப்பு எனப்படும். $b=a^{-1}$ என நாம் எழுதலாம்.

(6) சமனியின் ஒருமைத்தன்மை (uniqueness) : இயற்கணித அமைப்பில் சமனி உறுப்பு (இருப்பின்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது.

(7) எதிர்மறையின் ஒருமைத்தன்மை (uniqueness) : இயற்கணித அமைப்பில் ஓர் உறுப்பின் எதிர்மறை (இருப்பின்) ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது.

(8) 0 அல்லது 1 ஐ உறுப்பாக கொண்ட ஒரு மெய் அணிக்கு பூலியன் அணி (Boolean Matrix) என்று பெயர்.

(9) மட்டு எண்கணிதம்: n ஒரு மிகை முழு எண் >1 என்க. இங்கு n என்பது 'மட்டு எண்' என அழைக்கப்படும். a மற்றும் b ஆகிய இரண்டு முழுக்களுக்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசம் n –ன் மடங்கு எனில், மட்டு n –ன் அடிப்படையில் a –ம் b –ம் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். வேறுவிதமாகச் கூறினால் $a \equiv b$ (மட்டு n) என்பதன் பொருள் $a-b=n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ மற்றும் a ஐ n ஆல் வகுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் மீதி b ஆனது மிகக் குறைந்த மிகை முழு எண் ஆகும். $(0 \le b \le n-1)$

(10) தர்க்கக் கணிதம் என்பது கணிதக் குறியீடுகள் மூலம் தர்க்க கல்வி அறிவை கற்றல் ஆகும்.

(11) p ஒரு தனிக் கூற்று என்க. p -ன் மறுப்பு என்பது p -ன் மெய் மதிப்பின் எதிர்மறை உடைய கூற்றாகும். இதை $\neg p$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். p -ன் மெய்மதிப்பு F எனில், $\neg p$-ன் மெய்மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது F ஆகும்.

(12) p , q ஏதேனும் இரு தனிக் கூற்றுகள் என்க. இவற்றை 'மற்றும் (and)' என்ற வார்த்தையால் இணைக்கப்படும்பொழுது 'p மற்றும் q' என்ற கூட்டுக் கூற்றை அடைகிறோம். இதனை $p \wedge q$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். இதனை p இணையல் (conjunction) q அல்லது p தொப்பி (hat) q எனப் படிக்கலாம். p-ம், q-ம் T ஆக இருக்கும்பொழுது $p \wedge q$ -ன் மெய் மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில் அது F ஆகும்.

(13) இரண்டு தனிக் கூற்றுகள் p மற்றும் q -ஐ அல்லது (or) என்ற வார்த்தையால் இணைத்தலால் பெறப்படும் கூட்டுக் கூற்று. p , q -ன் பிரிப்பிணைவு (disjunction) எனப்படும். இதனை $p \vee q$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர். இதனை p பிரிப்பிணைவு (disjunction) q அல்லது p கிண்ணம் (cup) q எனப் படிக்கலாம். p -ம், q-ம் F ஆக இருக்கும்பொழுது $p \vee q$ -ன் மெய் மதிப்பு F ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது T ஆகும்.

(14) ஏதேனும் p , q என்ற இரு கூற்றுகளின் நிபந்தனைக் கூற்றானது p எனில், q -வை $p \rightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். p -ன் மெய் மதிப்பு T ஆக இருந்து q -ன் மெய் மதிப்பு F ஆகவும் இருந்தால் $p \rightarrow q$ என்ற கூற்றின் மெய் மதிப்பு F ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அது T ஆகும்.

(15) p மற்றும் q ஏதேனும் இரு கூற்றுகள் என்க. $p \rightarrow q$ மற்றும் $q \rightarrow p$ -ன் கூட்டுக் கூற்று இரு நிபந்தனைக் கூற்று என அழைக்கப்படும். இதனை $p \leftrightarrow q$ எனக் குறிப்பிடுவர். p மற்றும் q -க்கு ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகள் இருந்தால் மட்டுமே $p \leftrightarrow q$ -ன் மெய் மதிப்பு T ஆகும். அவ்வாறில்லை எனில், அதன் மெய் மதிப்பு F ஆகும்.

(16) ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பை பொருட்படுத்தாமல் **மெய்மம்** (tautology) எனக் கூறவேண்டுமானால் அதன் மெய் மதிப்பு எப்பொழுதும் T ஆக இருக்கவேண்டும். இதை $\mathbb{T}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

(17) ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பை பொருட்படுத்தாமல் **முரண்பாடு** (contradiction) எனக் கூறவேண்டுமானால் அதன் மெய் மதிப்பு எப்பொழுதும் F ஆக இருக்கவேண்டும். இதை $\mathbb{F}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.

(18) ஒரு கூற்று, மெய்மமும் அல்ல முரண்பாடும் அல்ல எனில், அதற்கு **நிச்சயமின்மை** (contingency) என்று பெயர்.

(19) A மற்றும் B என்கிற இரண்டு கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய்மை அட்டவணைகளின் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகளைப் பெற்றிருப்பின் அவை தர்க்க சமானமானவை அல்லது சுருக்கமாக சமானமானவை எனப்படும். இதனை $A \equiv B$ அல்லது $A \Leftrightarrow B$ எனக் குறிப்பிடுவர். மேலும் குறிப்பாக A -ம் B -ம் தர்க்க சமானமானவை எனில், $A \leftrightarrow B$ கண்டிப்பாக ஒரு மெய்மமாக இருக்கும்.

(20) சமானமானவைக்குரிய சில விதிகள் **:**

தன்னடக்க விதிகள்

Idempotent Laws : (i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

பரிமாற்று விதிகள்

Commutative Laws: (i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

சேர்ப்பு விதிகள்

Associative Laws: (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

(ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

பங்கீட்டு விதிகள்

Distributive Laws: (i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

சமனி விதிகள்

Identity Laws: (i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \vee \mathbb{F} \equiv p$

(ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ மற்றும் $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

நிரப்பு விதிகள்

Complement Laws : (i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$

(ii) $\neg \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ மற்றும் $\neg \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

உட்சுழற்சி விதி (அ) இரட்டை மறுப்பு விதி

Involution Law or Double Negation Law: $\neg(\neg p) \equiv p$

டி மார்கன் விதிகள்

de Morgan's Laws: (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$

ஈர்ப்பு விதிகள்

Absorption Laws: (i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

இணையச் செயல்பாடு (ICT CORNER)

https://ggbm.at/dy9kwgbt அல்லது Scan the QR Code

இணைய உலாவியை திறக்கவும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரலி/விரைவுக் குறியீட்டை தட்டச்சு செய்யவும், GeoGebra-வின் "**12th Standard Mathematics Vol-2**" பக்கம் தோன்றும். இப்பணித்தாள் புத்தகத்தின் இடதுபக்கம் உங்கள் பாடநூலுடன் தொடர்புடைய பல அத்தியாயங்கள் காணப்படும். அவற்றில் "**Discrete Mathematics**" எனும் அத்தியாயத்தைத் தேர்வு செய்க.

B225_12_MATHS_TM

இப்பொழுது இப்பாடம் தொடர்பான பல பணித்தாள்களை இப்பக்கத்தில் காண்பீர்கள். அனைத்துப் பணித்தாள்களையும் செய்து பார்க்கவும்.